第 5 章　机械振动

一　由运动特征求解简谐振动方程

1. 简谐振动方程

· 若物体的运动方程满足以下形式（x 为物体相对平衡位置的位移），则称物体作简谐振动

简谐振动 位移	简谐振动 速度	简谐振动 加速度
$x=A\cos(\omega t+\varphi)$	$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$	$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$

· **振幅**　A　物体的最大位移

角频率　ω　物体相位的变化速率，单位：弧度/秒

初相位　φ　$t=0$ 时的相位（**通常取** $-\pi \sim \pi$ ）

· **相位**　$\omega t+\varphi$　弧度制，以 2π 的周期性影响 x

· **周期**　T　物体做一次完整振动（相位变化 2π ）所需时间

· **频率**　ν　物体每秒钟作完整振动的次数

周期、频率间的关系

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega}$$

· 在简谐振动的每个周期中，都有以下 4 个相位，使物体的位移、速度、加速度具有特殊性

相位	时间	位移	速度	加速度
$0+2k\pi$	t_0	正向最大值	0（负斜率）	负向最大值
$\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$t_0+\frac{T}{4}$	0（负斜率）	负向最大值	0（正斜率）
$\pi+2k\pi$	$t_0+\frac{T}{2}$	负向最大值	0（正斜率）	正向最大值
$\frac{3}{2}\pi+2k\pi$	$t_0+\frac{3T}{4}$	0（正斜率）	正向最大值	0（负斜率）
φ	0	$A\cos\varphi$	——	——

· **不要硬记这个表格，要结合图象理解**

求解振动方程的一般思路

① 收集题给信息，通过公式转化为 ω 、 A 和 φ ，然后得到方程

② 注意速度的最大值（幅值）为 ωA

③ φ 可能会得到两组解（ $\varphi_0+2k\pi$ ），要根据题给信息排除一组，剩下取合适的 k 让 φ 位于 $-\pi \sim \pi$

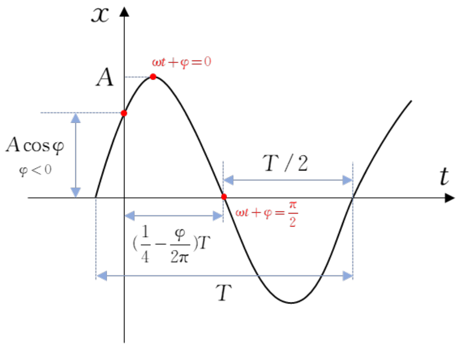
例 1　（20—21，2）一质点作简谐运动，速度最大值 $v_m=6\text{cm/s}$ ，振幅 $A=2\text{cm}$ 。若取速度具有正向最大值的那一时刻为 $t=0$ ，则振动方程表达式为________________m。

解　可获得的信息：① $A=0.02\text{m}$　② $v_m=\omega A=6\text{cm/s}$ → ①②得 $\omega=3\text{rad/s}$

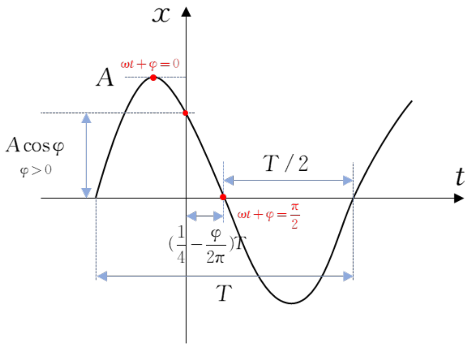
③ $t=0$ 时速度具有正向最大值 → 对应相位 $\omega t+\varphi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ ，取 $k=-1$ 得到 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

综上所述，振动方程表达式为 $x=0.02\cos(3t-\frac{\pi}{2})\text{m}$

2. **简谐振动的 $x-t$ 图象**

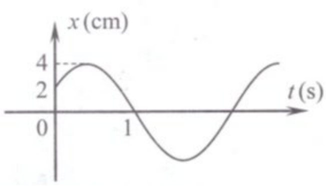


$t=0$ 处斜率大于 0 时，取 $-\pi<\varphi<0$



$t=0$ 处斜率小于 0 时，取 $0<\varphi<\pi$

例 2 （19—20，8）一简谐振动曲线如图所示，则其振动周期为________________。



解 读图可得：① $A=4\text{cm}$ ② $A\cos\varphi=2\text{cm}$ ③ $t=0$ 处斜率为正

$$\therefore\ \varphi=\arccos\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3}\ \rightarrow\ \varphi=-\frac{\pi}{3}$$

④ $t=1\text{s}$ 对应位移 0（负斜率），且 0~1s 相位差小于 π

$$\therefore\ \text{对应相位}\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\ \rightarrow\ t=1\text{s}\ \text{时的相位为}\ \frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ \omega t+\varphi=\frac{2\pi}{T}t+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

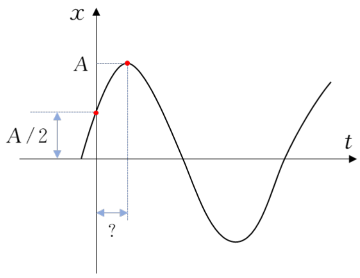
联立，代入 $t=1\text{s}$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，解得 $T=2.4\text{s}$

例 3 （16—17，1）一质点作简谐振动，周期为 T。当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的最短时间为________________。

解 把图象画出来，要求的就是这个时间“?”

同例 2 可以得到起点的相位 $\varphi=-\pi/3$，终点的相位为 0

$$\therefore\ (\omega t_1+\varphi)-(\omega t_0+\varphi)=\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{3}，\ \text{解得}\ \Delta t=\frac{T}{6}$$



二 简谐振动动力学

1. 动力学表达式

· 若物体所受合力具有如下形式（与位移成反比），则物体将作简谐振动，且

学过常微分方程就知道为什么了

简谐振动动力学

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0$$

简谐振动角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

· 若初速度为 v_0，初始位移为 x_0，则

简谐振动振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

简谐振动初相位

$$\varphi=\arctan\frac{-v_0}{\omega x_0}$$

x_0	v_0	φ 所处象限
>0	>0	Ⅳ
>0	<0	Ⅰ
<0	>0	Ⅱ
<0	<0	Ⅲ

题型：由动力学求解振动方程

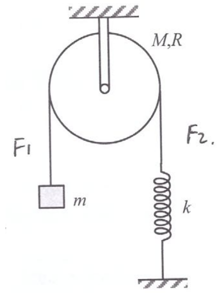
① 首先假设系统静止，对物体进行**受力分析（易错点：弹簧作用力的符号）**，列出式子

② 然后设物体位移为 x，再作受力分析，列出式子（受力分析利用第 2、3 章的内容）

③ 联立以上所有式子，得到微分方程，检查是否具有对应形式，再按公式完成题目要求

（实际上更推荐后面介绍的能量法）

例 4　（20–21，1）一劲度系数为 k 的轻弹簧下端固定，上端系一轻绳，轻绳绕过定滑轮和质量为 m 的物体连接，如图所示。这定滑轮可看作是半径为 R、质量为 M 的圆盘，它可绕无摩擦的水平轴转动。试求这装置的振动周期



解　对物体和滑轮作受力分析：

物体：$mg-T_1=ma$ ①　　滑轮：$T_1R-T_2R=\frac{1}{2}MR^2\beta$ ②

弹簧：$T_2=k\Delta x$ ③　　运动学规律：$a=R\beta$ ④

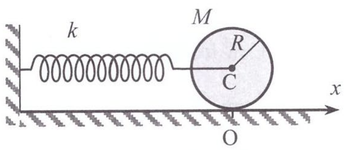
则当系统静止时：$a=0$，$\beta=0$，设此时弹簧伸长量 x_0 → $kx_0=mg$ ⑤

则以物体的平衡位置为 $x=0$，向下为正，则弹簧相对伸长量 $\Delta x=x_0+x$

联立 ①②③④⑤ & $a=\frac{d^2x}{dt^2}$：解得 $(\frac{1}{2}M+m)\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$，符合微分方程的形式

因此直接得到 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M/2+m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}}$

例 5　（18–19，2）如图所示，质量为 M、半径为 R 的均匀圆盘中心 C 系于一水平的轻弹簧上，圆盘可在水平面上作无滑滚动，弹簧的劲度系数为 k。现将圆盘中心 C 从平衡位置向右平移 x_0 后，由静止释放，可以证明圆盘的质心将作简谐振动。



（1）求圆盘质心的振动周期；

（2）如果以平衡位置为坐标原点，向右为 x 轴正方向建立坐标，并以释放这一时刻作为计时起点，试写出圆盘质心的振动方程。

解　（1）圆盘受力分析：

质心平动：$-kx-f=Ma_C$　转动：$fR=\frac{1}{2}MR^2\beta$　纯滚动：$a_C=\beta R$

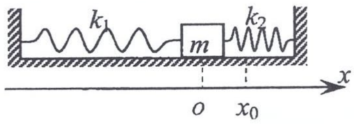
联立：$\frac{3}{2}Ma_C+kx=0$ → $\frac{3M}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ → $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$

（2）由题意，$t=0$ 时，$x=x_0$　静止释放 → $v_0=0$

因此 $\varphi=\arctan\frac{-v_0}{\omega x_0}=0$，$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=x_0$

∴ 振动方程 $x=x_0\cos(\sqrt{\frac{2k}{3M}}t)$

例 6 （15–16，7）如图所示，一质量为 m 的滑块，两边分别与劲度系数为 k_1 和 k_2 的轻弹簧联接，两弹簧的另外两端分别固定在墙上。滑块 m 可在光滑的水平面上滑动，o 点为系统平衡位置。将滑块 m 向右移动到 x_0，自静止释放，并从释放时开始计时。取坐标如图所示，则其振动方程为________。



解 设向右为正方向，则弹簧 k_1 伸长时产生的力向左，取负号，k_2 弹簧伸长时产生的力向右，取正号

设平衡时的弹簧伸长量分别为 x_1 和 x_2，则 $-k_1x_1+k_2x_2=0$

那么，物体位置为 x 时，弹簧 k_1 伸长量 x_1+x，k_2 伸长量 x_2-x

则 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k_1(x_1+x)+k_2(x_2-x)=-k_1x_1-k_1x+k_2x_2-k_2x=-(k_1+k_2)x$

因此 $\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$，由于静止释放，$v_0=0$，因此 $A=x_0$，$\varphi=0$

∴ 振动方程：$x=x_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}t\right)$

总结

虽然平衡时弹簧可能已经有弹力了，但不管物体位移到哪，这部分弹力都是存在且被抵消的，因此可以忽略这一组相互抵消的力。

2. 能量

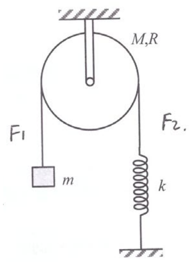
简谐振动能量

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2}$$

求解振动方程的另一种方法

列出机械能守恒表达式，对时间求导，看得到的微分方程形式是否满足

例 4 （20–21，1）一劲度系数为 k 的轻弹簧下端固定，上端系一轻绳，轻绳绕过定滑轮和质量为 m 的物体连接，如图所示。这定滑轮可看作是半径为 R、质量为 M 的圆盘，它可绕无摩擦的水平轴转动。试求这装置的振动周期



解 **使用能量法求解**：首先依然求出平衡状态时的受力情况：$mg=kx_0$

设向下为正方向，平衡位置为重力势能零点，则物体位移 x 时：

- 物块动能：$\dfrac{1}{2}mv^2$
- 滑轮动能：$\dfrac{1}{2}J\omega^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}MR^2\omega^2=\dfrac{1}{4}Mv^2$
- 物块重力势能：$-mgx$
- 弹簧弹性势能：$\dfrac{1}{2}k(x+x_0)^2=\dfrac{1}{2}kx^2+kx\dfrac{mg}{k}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2=\dfrac{1}{2}kx^2+mgx+\dfrac{1}{2}\dfrac{m^2g^2}{k}$

因此系统的机械能 $E=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}M\right)v^2-mgx+\frac{1}{2}kx^2+mgx+\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$

$$=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}M\right)v^2+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

该守恒式对时间求导：$\left(m+\frac{1}{2}M\right)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$

约掉 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，且有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$：$\boxed{\left(m+\frac{1}{2}M\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0}$ 符合振动微分方程形式

因此直接得到 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M/2+m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}}$

讨论

当物块悬挂在弹簧下面时，弹簧需要伸长 x_0 使得 $mg=kx_0$ 以达到平衡，而我们用的弹簧伸长量 x 是相对于 x_0 的，那么弹簧的实际伸长量为 $x+x_0$，弹性势能为 $\frac{1}{2}k(x+x_0)^2$。

这是否意味着用 $\frac{1}{2}kx^2$ 是错误的？实际上把 $\frac{1}{2}k(x+x_0)^2$ 拆分开来：$\frac{1}{2}kx^2+kxx_0+\frac{1}{2}kx_0^2$，代入 $mg=kx_0$：$\frac{1}{2}kx^2+mgx+\frac{1}{2}kx_0^2$。也就是实际的弹簧弹性势能分成了 3 个部分：

- $\frac{1}{2}kx_0^2$ 是弹簧平衡状态时的弹性势能，这部分**不参与能量转换**
- mgx 等于物体运动 x 时的重力势能，也就是在振动中**与物体的重力势能相互转换**
- $\frac{1}{2}kx^2$ 是**与物体动能相互转换**的部分

因此，如果使用 $\frac{1}{2}k(x+x_0)^2$，就要把物体的重力势能考虑进来，如果使用 $\frac{1}{2}kx^2$，则只需要考虑动能。所以上面的例题如果使用 $\frac{1}{2}kx^2$，整道题会变得简单很多。但考虑到解题过程的严谨性，还是建议使用 $\frac{1}{2}k(x+x_0)^2$

例 7 （17–18，7（节选））一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，设平衡位置处势能为零，总能量为 E。当这物块相对于平衡位置的位移等于振幅的一半时，其动能为__________。

解 总能量 $E=\frac{1}{2}kA^2$，弹簧弹性势能 $E_p=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)=\frac{1}{4}E$ → 动能 $E_k=E-\frac{1}{4}E=\frac{3}{4}E$

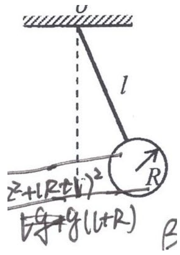
三 稳定平衡位置附近的近似简谐振动

稳定平衡位置近似简谐振动求解

- 与真正的简谐振动求法一模一样：受力分析/能量法得到微分方程
- 不同点在于，此时的微分方程中，原来的“kx”会变成如“$k\sin x$”的形式
- 此时只要对 x 做出范围限制，让这一项能近似于“kx”（最常见：$x\to 0$，$\sin x\approx x$）

- 单摆和复摆的公式不在此列出，也没必要记，要记的是公式的推导过程

例 7　（14–15，7）如图所示，一轻杆的一端固定一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环，杆沿直径方向；杆的另一端固定在 o 点，使圆环绕通过 o 点的水平光滑轴摆动。已知杆长为 l ，圆环绕 o 点的转动惯量 $J = m[R^2 + (R+l)^2]$。今使该装置在圆环所在的竖直平面内作简谐振动，则其周期为＿＿＿＿＿＿。



解　本题中为重力势能和动能相互转化。可得到质心位置距离 o 点 $l+R$ ，设偏转角 θ

重力势能：设圆环最低点处为 0，则 $E_p = mg(l+R)(1-\cos\theta)$

动能： $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m[R^2 + (R+l)^2]\omega^2$

因此机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m[R^2 + (R+l)^2]\omega^2 + mg(l+R)(1-\cos\theta)$

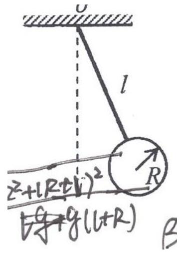
两边同时对 t 求导： $m[R^2 + (R+l)^2]\omega\frac{d\omega}{dt} + mg(l+R)\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0$

$\rightarrow\ [R^2 + (R+l)^2]\frac{d^2\theta}{dt^2} + g(l+R)\sin\theta = 0$

只要令 $\theta \to 0$ ，则 $\sin\theta \approx \theta$ ，近似为简谐振动 → 由公式立即推 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + (R+l)^2}{g(l+R)}}$

（用受力分析法也是可以的，本题中两者性能差不多）

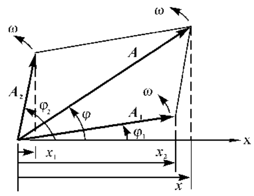
例 8　（14–15，7）如图所示，一轻杆的一端固定一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环，杆沿直径方向；杆的另一端固定在 o 点，使圆环绕通过 o 点的水平光滑轴摆动。已知杆长为 l ，圆环绕 o 点的转动惯量 $J = m[R^2 + (R+l)^2]$。今使该装置在圆环所在的竖直平面内作简谐振动，则其周期为＿＿＿＿＿＿。



解　本题中为重力势能和动能相互转化。可得到质心位置距离 o 点 $l+R$ ，设偏转角 θ

四　振动合成

1. 同方向同频率的谐振动合成



- $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ 与 $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ 叠加 → $x = A\cos(\omega t + \varphi)$，其中

  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$　　$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

例 9　（19–20，7）两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为 $x_1 = 6\times10^{-2}\cos(5t + \frac{1}{2}\pi)$ ，$x_2 = 2\times10^{-2}\sin(\pi - 5t)$ (SI)，它们的合振动的振幅为＿＿＿＿＿，初相为＿＿＿＿＿。

解　注意到一个是 cos，一个是 sin，先把 sin 换成 cos：

$$x_2 = 2\times10^{-2}\sin(\pi - 5t) = 2\times10^{-2}\cos[\frac{\pi}{2} - (\pi - 5t)] = 2\times10^{-2}\cos(5t - \frac{\pi}{2})$$

用旋转矢量图表示可以轻松得到振幅 $A = 0.06 - 0.02 = 0.04\text{m}$ ，初相 $\varphi = \frac{\pi}{2}$